

基于应力—强度干涉模型的动态可靠度计算

陈瑞涛

摘要: 对传统的应力—强度模型进行了修正。基于修正后的应力—强度干涉模型为基础, 在考虑强度退化下, 建立以齿轮传动系统的动态可靠性模型, 得到传动系统各齿轮部件和整体系统的可靠度的时间变化曲线。

关键词: 应力—强度; 可靠度

一、可靠性概述

可靠性式度量产品在规定时间和条件完成相应的功能的能力。根据使用目的、需求和场合的不同, 常用的可靠性特征量包括可靠度 (Reliability)、失效率 (Failure Rate)、平均故障间隔时间 (Mean Time Between Failure)、平均寿命、剩余寿命等。

二、系统可靠性数学模型

在产品或设备的可靠性计算中, 是对产品自身强度和外界施加的应力进行比较, 在数学上是对二者的概率密度函数放在同一坐标系中进行干涉分析, 即分析应力有大于强度的可能性, 分别用 $f(S)$ 和 $g(S)$ 表示产品自身承受强度和外界施加应力的概率密度函数, 使应力和强度发生干涉, 可以得出零件的可靠度 R , 如式 2-1 所示:

$$R = \int_0^{\infty} g(s) \left[\int_0^{\infty} f(s) ds \right] ds \quad (2-1)$$

鉴于 $g(S)$ 和 $f(S)$ 的分布类型的不同, 我们分布采用不同的方法进行分析。在数学上, 若 $g(S)$ 和 $f(S)$ 概率密度函数均为可积的, 那么我们直接采用二重积分法进行分析求解; 若 $g(S)$ 和 $f(S)$ 是服从正态分布, 则可以直接采用求解联立方程的方法进而查手册即可求得可靠度。在实际工程中, 产品参数大多服从正态分布。假设 $g(S)$ 和 $f(S)$ 二者独立, 则有:

$$R = \prod_{i=1}^n \int_0^{S_i} g(s) ds \quad (2-2)$$

式中 i ——表示部件的编号;

n ——表示部件的个数;

S_i ——表示部件的自身强度。

对于某一具体部件来说, 自身的强度应大于外界应力, 则部件才可靠。

总之, 分析可靠性的目的是处理各类可靠性问题, 可

供选择的计算方法较少, 然而可靠性问题的类型却非常丰富, 这就形成了一定矛盾。在大多数情况下, 机械系统并非为完全的, 系统内的各零件失效互相关联, 如此就明显提升了可靠性建模的难度。所以, 相关学者对机械系统展开了综合性的研究, 同时将其模型划分为下述几类:

(一) 串联系统: 系统的任意某部件失效, 都引起系统失效; 或者说, 系统所有部件必须工作正常。可靠性模型如式 (2-3)

$$R = \prod_{i=1}^n R_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-3)$$

(二) 并联系统: 系统中的几个下属组件, 只要有一个单元工作正常, 则系统都会正常运转; 或者说, 系统所有部件都失效, 设备才会失效。典型的并联系统为双通道传动系统。可靠性模型如式 (2-4)

$$R = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-4)$$

(三) 表决系统: 系统总共由 n 个单元组成, 在表决系统中 n 个单元中有 j ($j \geq k$) 个单元可以正常工作, 系统就能正常运行, 又称为 k/n 冗余系统。可靠性模型如式 (2-5)

$$R = \sum_{i=k}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} R^i (1-R)^{n-i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-5)$$

(四) 储备系统: 系统总共由 n 个单元组成, 系统中只需要一个单元工作运行, 其余的单元都处于备用。当工作的单元故障时, 只需要用备用单元替换故障单元, 系统又可以正常工作, 直到所有备用单元全部故障, 系统才失效, 可靠性模型如式 (2-6);

$$R = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (2-6)$$

对于工程机电装备而言,其通常不是某个独立的系统,而是通过多个系统构成的。本文主要对风电齿轮传动系统展开分析,它是风电机组中非常关键的部分。对于其传动系统来讲,由于工况十分繁杂,维修难度较大,其可靠性问题很大程度上阻碍了它的进一步发展。

三、传统应力—强度干涉模型

在进行零件可靠性设计的过程中,应用较为广泛的模型式应力—强度模型具体如下:

$$Z=X-Y \geq 0 \quad (3-1)$$

在上述式子中, X——产品可以承受的强度;

Y——外界施加的应力;

X 与 Y 式彼此互不影响, Z 属于随机的变量, 且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 此时可知:

$$R=P(Z \geq 0) \quad (3-2)$$

则:

$$PE=1-R=P(Z < 0) \quad (3-3)$$

图 1 是概率密度干涉曲线图, 图中阴影部分称为干涉区, 表示零件在此区间段内可能出现失效。

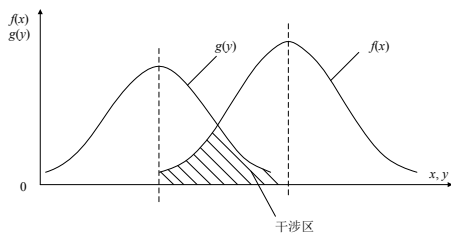


图 1 概率密度干涉图

将图 1 概率密度干涉图干涉部分放大, 如图 2 所示:

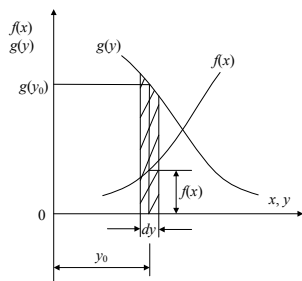


图 2 概率密度函数联合积分法原理图

$f(x)$ 随机变量 X 概率密度函数; $g(y)$ 随机变量 Y 概率密度函数, 有

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \quad (3-4)$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left[-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] \quad (3-5)$$

应力 y_0 处于 dy 范围内的可能性为:

$$P\left(y_0 - \frac{dy}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{dy}{2}\right) = g(y_0)dy \quad (3-6)$$

强度 x 必须超过 y_0 :

$$P(x > y_0) = \int_{y_0}^{\infty} f(x)dx \quad (3-7)$$

假如上述情况都在同一时间出现, 相应的概率为:

$$P = g(y_0)dy \int_{y_0}^{\infty} f(x)dx \quad (3-8)$$

在通过积分处理之后可得到:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_y^{\infty} f(x)dx \right] dy \quad (3-9)$$

其中 X 和 Y 都是正态分布, 即 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 那么随机变量 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2) \quad (3-10)$$

其概率密度函数:

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \exp\left[-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (3-11)$$

基于产品的应力—强度干涉模型的可靠度函数也可表述为:

$$R_z = P(Z > 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz \quad (3-12)$$

由式 (3-11) 和 (3-12), 都没有时间参数, 一般可靠性随时间变化, 实际上, 强度和应力也是会随时间而产生变化, 且当产品的强度随时间退化时, 强度和应力的干涉区域应该会随时间变大, 这就反映了产品的可靠性在逐渐降低。所以, 产品可以承受的强度 X 和外界施加的应力 Y 都是随时间变化的。

四、与时间相关的应力—强度干涉模型

将产品承受的强度 X 和外界施加的应力 Y 看作随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 分别采用对称和齐次漂移布朗运动来描述随机变量 $X(t)$ 和 $Y(t)$:

$$X(t) = \sigma_B B(t) + d(s) \cdot t + \mu_1 \quad (4-1)$$

$$Y(t) = \sigma B(t) + \mu \quad (4-2)$$

式中, $B(t)$ ——均值为 0, 方差为时间 t 的标准布朗运动;

σ_B ——扩散系数, 通常为常数;

$d(s)$ ——漂移系数;

μ ——初始起点。

其中 μ_1 指产品所能承受的初始强度, μ_2 指外界对产品施加的初始应力值。由 $Z(t)=X(t)-Y(t)$ 得到密度函数:

$$h_t(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_B^2 t}} \exp\left[-\frac{z - (d(s) \cdot t - \mu_z)^2}{2t\sigma_B^2}\right] \quad (4-3)$$

产品可靠度为： $R=P(Z(t) > 0)=P(X(t)-Y(t) > 0)$ 。一般产品的强度会随着时间退化，其退化规律是服从负漂移布朗运动的，即 $d(s) < 0$ ，根据布朗运动首次分布。在时间 $(0, t_0)$ 内：

$$R_{t_0} = P(Z(t) > 0) = \int_0^{\infty} \frac{|\mu_z|}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma_B^2}} \exp\left[-\frac{(d(s)t + \mu_z)^2}{2t\sigma_B^2}\right] dz \quad (4-4)$$

由式 (4-4)，和数值积分计算得出，时间 t_0 趋于 0 时，产品可靠度为 1。但实际工程中产品的初始可靠度一定不为 1，且式 (3-12) 是式 (4-4) 将强度和应力设为随时间变化的量，当初始时间 t_0 趋于 0 时，式 (3-12) 与式 (4-4) 应该相等，但并不相等，所以该模型还需修正。

产品在未投入使用时可靠度的影响下，产品的干涉变量由初始状态 z_0 退化到 $z(t)$ ，这时产品可靠度可以以下方式表示：

$$R=P(Z > 0) \cdot P(X(t)-Y(t) > 0) = R_{t_0} \cdot R_z \quad (4-5)$$

当 $t=0, R=R_z$ 。

针对传动系统而言，其一般情况下采取行星齿轮传动，并根据规范与轴齿轮传动搭配应用，本研究主要针对这种组合的结构型式。针对行星齿轮传动来讲，其一般情况下选择行星架输入，主要通过行星轮对载荷进行有效的分担。另外，如果选择斜齿轮传动，结合相关经验结果可以发现，在对系统可靠度展开分析的过程中，其重点分析关键零件的影响，本文针对行星架、太阳轮等构成的系统存在的可靠性问题展开分析。通常来讲，可以对齿面接触疲劳强度失效进行下述假设：在齿轮运行的过程中，这两类模式通常并存，而且出现在齿轮的多个部位，此处可判定两类模式中构件强度互不影响，但是其载荷很大程度上表现出统计相关性。同时，针对齿面接触疲劳失效而言，唯有在三路元件同时出现失效问题的时候，其整体才会出现相应的特征；针对齿根发生的失效问题，如果某个行星齿轮出现故障，系统就无法正常运行。图 3 为行星轮传动系统的可靠性方框图。

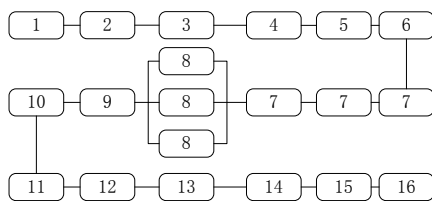


图 3 风电机组传动系统可靠性方框图
单元序号的含义具体为：

- 1、3、5——各元件的接触疲劳
 - 2、4、6——各元件的弯曲疲劳
 - 7、8——行星齿轮的弯曲疲劳强度和接触疲劳强度
 - 9、11、13、15——斜齿轮的接触疲劳强度
 - 10、12、14、16——斜齿轮的弯曲疲劳强度
- 结合上述方框图，我们可以推导出下述公式：

$$R = R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6 (R_7)^3 [1 - (1 - R_8)^3] R_9 R_{10} R_{11} R_{12} R_{13} R_{14} R_{15} R_{16} \quad (4-6)$$

因为系统各零部件强度会伴随时间发生一定改变，在长期载荷作用下，强度是逐渐退化的，则在考虑强度退化时应力—强度干涉模型的零件动态可靠性模型：

$$R(t) = P(S(t) < r(t)) \cdot R_0 \quad (4-7)$$

其中 $t=0$ 时 $R=R_0$ 。

以 1.5MW 风电机组传动系统为例，参数：叶轮半径 26.8m。输入轴转速 14.6r/min，额定叶轮转矩 1.25×10^6 Nm，额定风速 12m/s，风能系数 0.55，齿轮材料 20CrMnTi；切入风速 4m/s，切出风速 20m/s，太阳轮齿数 27，行星轮齿数 44，内齿轮齿数 115，齿轮 1 齿数 103，齿轮 2 齿数 24，齿轮 3 齿数 99，齿轮 7 齿数 24。低速轴模数 16，齿合角 23° ；中速轴法面模数 12，螺旋角 10.5° ，齿合角 21° ；高速轴法面模数 24，螺旋角 12.5° ，齿合角 21° 。随机风速 $v \sim W(k=4.5065, c=13.1485)$ 。其中求齿轮的应力时各参数都是认为服从正态分布，其系统可靠度结果如图 4。

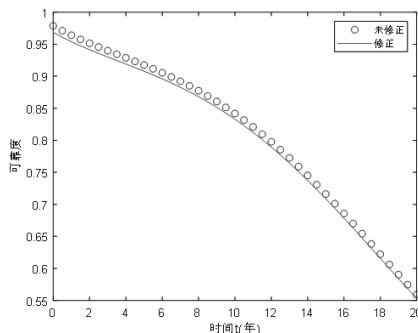


图 4 系统可靠度时间变化曲线图

五、结语

结合上图我们可以发现，所有元件的可靠性伴随时间的延长而表现出不断降低的态势，其可靠度伴随使用时间的增多而表现出持续降低的态势，修正的应力—强度可靠性模型得出的可靠度曲线相比于未修正的可靠性模型会往下移动，从而得出修正的可靠性模型更安全。

参考文献

- [1] 陈川. 风电齿轮箱传动系统振动及可靠性分析 [D]. 兰州：兰州理工大学，2016.
- [2] 吕震宙，宋述芳，李洪双，等. 结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析 [M]. 北京：科学出版社，2009.
- [3] 黄洪钟. 机械传动可靠性理论与应用 [M]. 北京：中国科学技术出版社，1995.
- [4] 方亚. 机械产品可靠性评估方法研究 [D]. 西安：西北工业大学，2007.

(作者单位：四川九洲空管科技有限责任公司)